**Л 10, ч. 2. Принятие решений** **в условиях неопределенности**

Операции над нечеткими множествами. Логические операции. Алгебраические операции.Четкое множество «-уровня». Нечеткая и лингвистическая переменные. Нечеткие числа.

1. **Операции над нечеткими множествами**

Как и с обычными множествами, с нечеткими множествами можно производить стандартные операции: **объединение, пересечение, декартово произведение** и т. д. Отличие заключается лишь в том, что реализации этих операций в разных задачах могут отличаться. Здесь мы рассмотрим наиболее распространенные интерпретации действий с нечеткими множествами.

**Логические операции**

Включение. Пусть и — нечеткие множества на универсальном множестве . Говорят, что содержится в , если

Обозначение: .

Например, если - множество чисел, очень близких к 10, а В - множество чисел, близких к 10, то . Формально это можно проверить, используя функции принадлежности. Если и - обычные множества, а и - характеристические функции, то из неравенства (1) следует, что если некоторый элемент принадлежит множеству , т. е. , то он принадлежит и множеству , поскольку .

Множества и **равны**, если

Обозначение: .

**Объединение**. Объединением нечетких множеств и называется нечеткое множество, обозначаемое и , функция принадлежности которого определяется как:

Иначе говоря, объединением и называется наименьшее нечеткое подмножество, включающее как , так и .

**Пересечение**. Пересечением и называется наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в множествах и :

**Дополнение**. Дополнение нечеткого множества имеет функцию принадлежности . Обозначение: или .

**Разность**. Разностью называют множество с функцией принадлежности

На рис. 1 проиллюстрированы данные выше определения. Операции над нечеткими множествами можно проиллюстрировать и так, как показано на рис. 2.

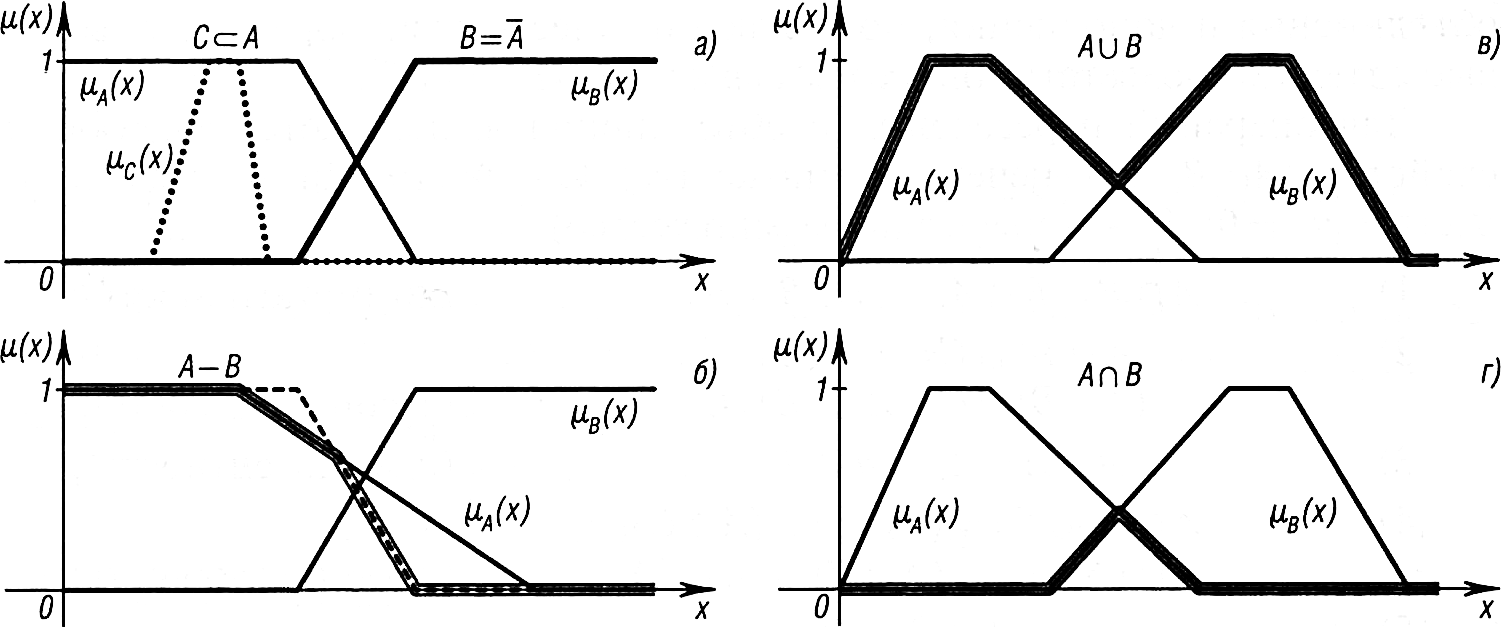


Рис. 1. Операции с нечеткими множествами: а) подмножество и дополнение нечеткого множества; б) разность нечетких множеств; в) объединение нечетких множеств; г) пересечение нечетких множеств

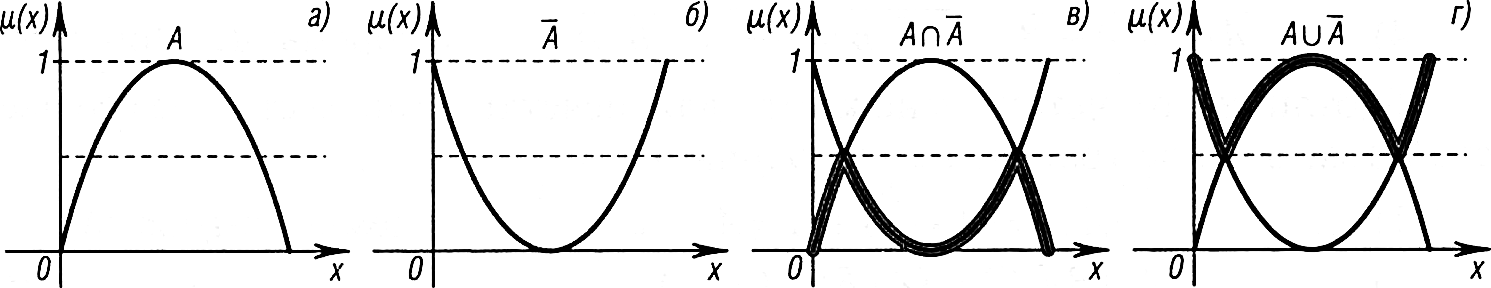
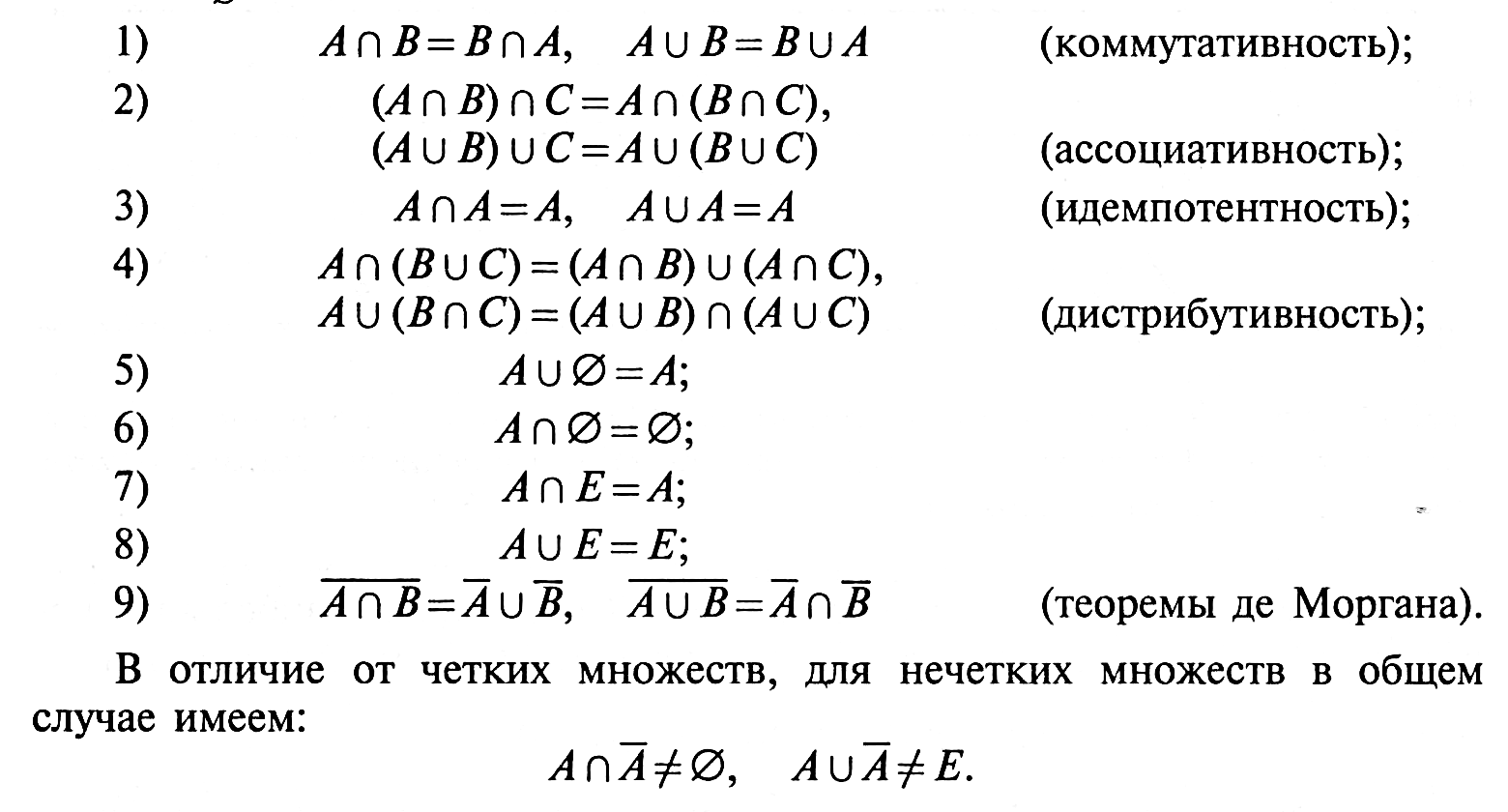


Рис. 2. Графическая интерпретация логических операций: а) нечеткое множество А; б) нечеткое множество ; в) ; г) ;

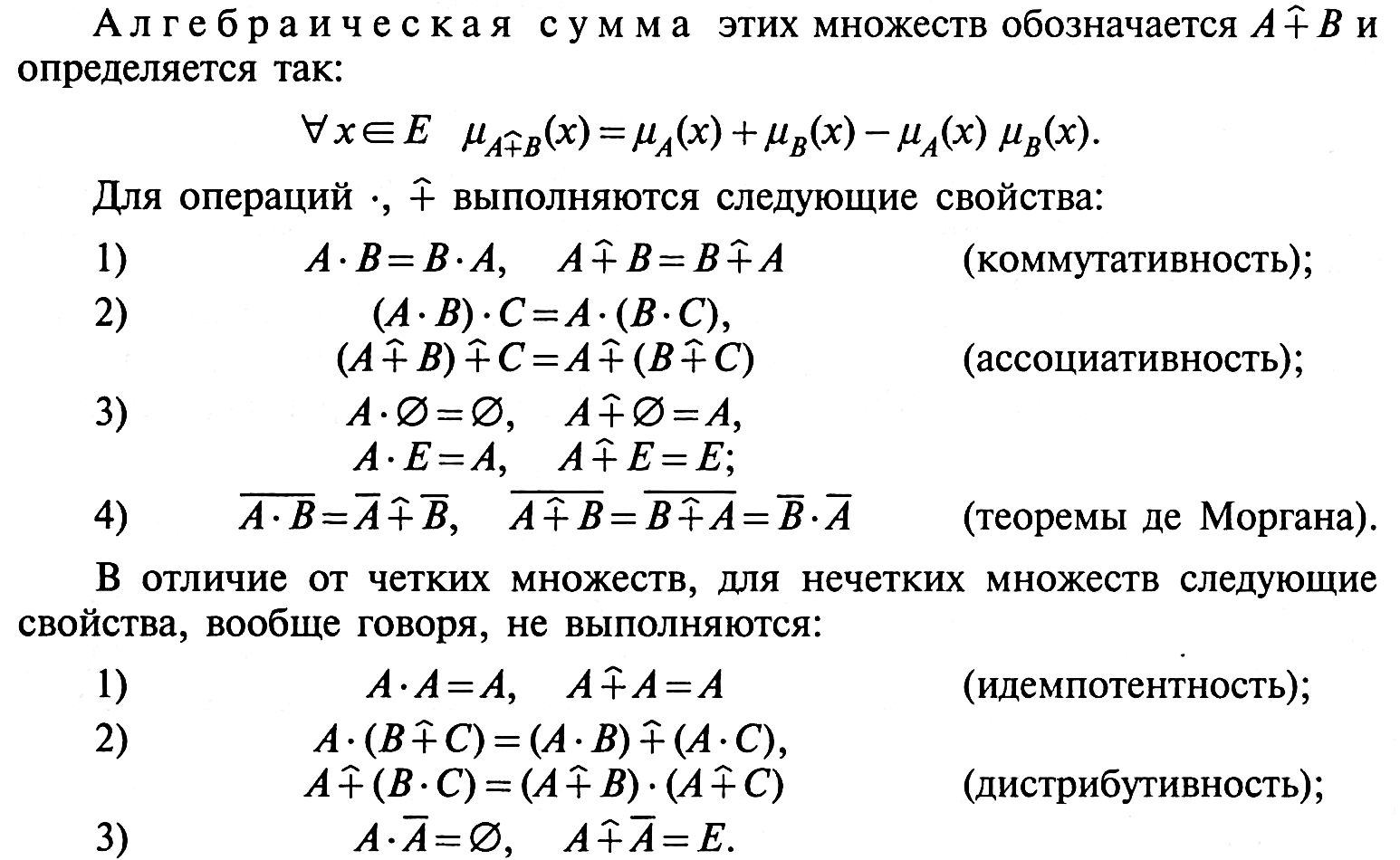
Введенные операции над нечеткими множествами основаны на использовании операций **max и min**. В теории нечетких множеств разрабатываются вопросы построения обобщенных операторов пересечения, объединения и дополнения, позволяющих учесть разнообразные смысловые оттенки соответствующих им связок И, ИЛИ, НЕ.

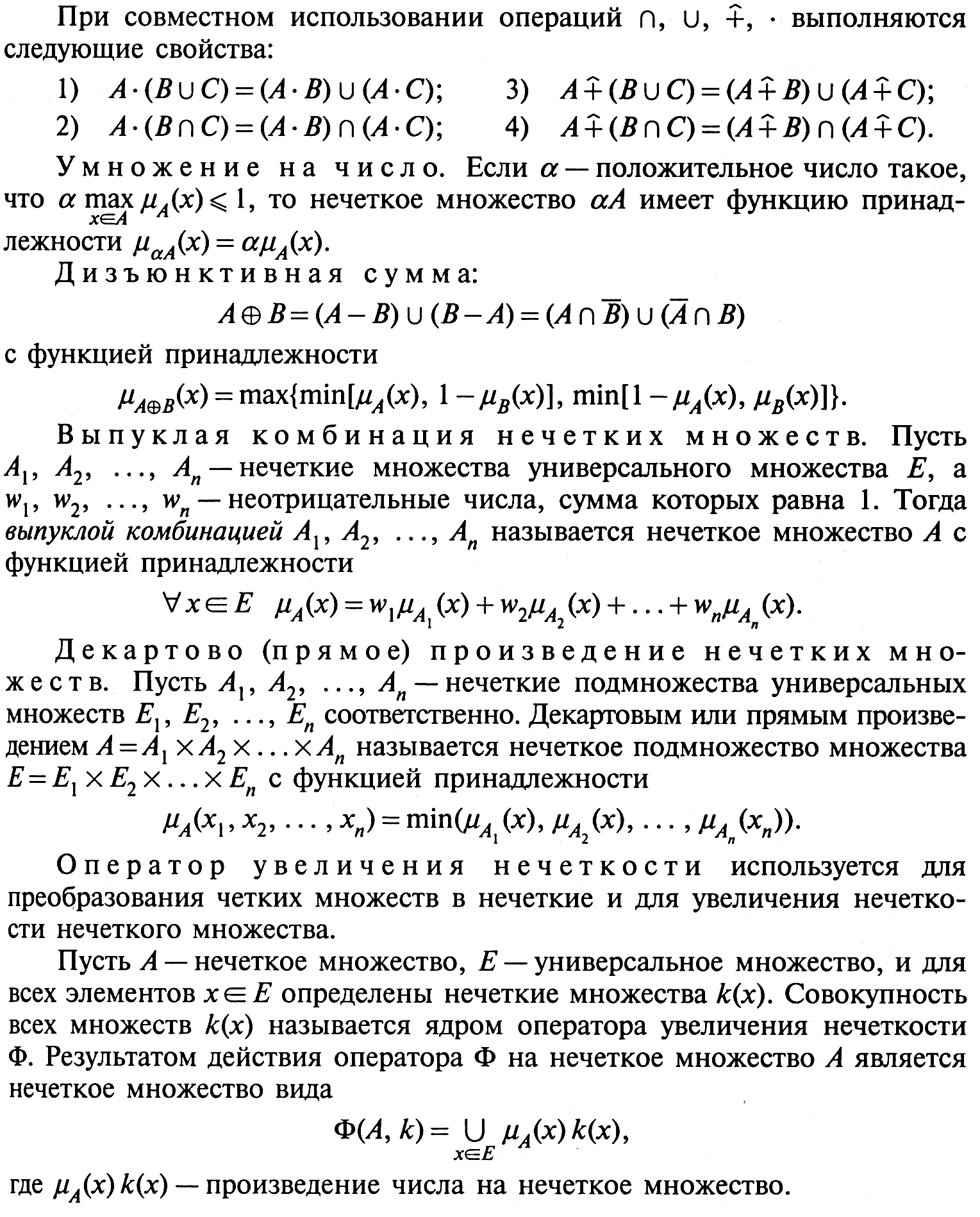
Для **операций пересечения и объединения** выполняются следующие свойства (, , - нечеткие множества; - пустое множество, т. е. - универсальное множество):



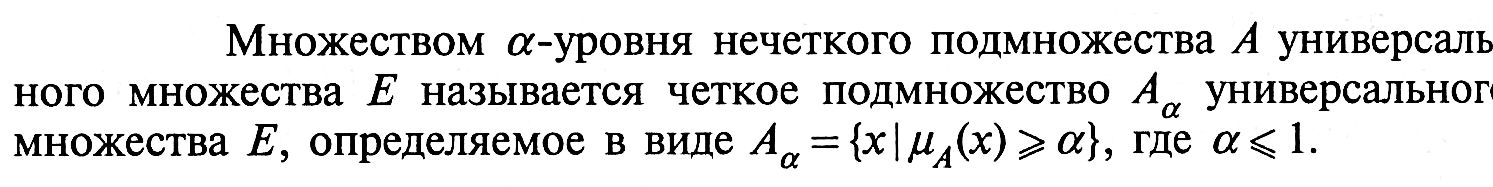
**Алгебраические операции**

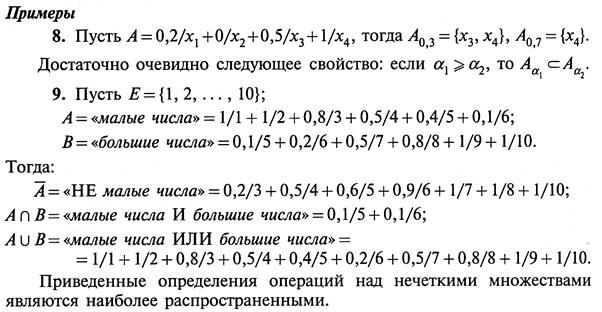
Алгебраическое произведение нечетких множеств и обозначается и определяется так:





**Четкое множество «-уровня (или уровня )**





**Нечеткая и лингвистическая переменные**

Понятия нечеткой и лингвистической переменных используются при описании объектов и явлений с помощью нечетких множеств.

Лингвистические переменные (ЛП) были предложены как средство моделирования нечеткости естественного человеческого языка, в котором границы между отдельными понятиями часто неявны и размыты. По сути, **лингвистические переменные стали предпосылкой к развитию всей нечеткой логики и теории нечетких множеств**.

В настоящее время ЛП являются распространенным способом описания сложных систем, параметры которых по каким-либо причинам должны рассматриваться не с количественных позиций, а как качественные. При этом лингвистические переменные дают возможность поставить в соответствие качественным значениям некоторую количественную интерпретацию с заданной долей уверенности, что позволяет обрабатывать качественные данные на компьютере. Как следствие, другой сферой применения ЛП является **нечеткий логический вывод**, отличие которого от обычного заключается в том, что истинность логических высказываний **описывается не двумя значениями** ЛОЖЬ и ИСТИНА или 0 и 1, а множеством значений в интервале [0, 1].

Продолжим рассмотрение примера о возрасте человека. Как правило, для описания человека достаточно общей качественной оценки его возраста в виде фраз «молодой», «переходный», «пожилой» и т. д. Причем за каждым из этих названий скрывается некоторая совокупность конкретных значений, которая у разных людей может различаться, но в целом является общепринятой. Таким образом, при описании возраста неосознанно используется некоторый набор нечетких множеств, с помощью которых описывается конкретное понятие. Такой набор и получил название лингвистической переменной, для которой в нечеткой логике существуют особые правила создания и формального описания.

В основе понятия лингвистической переменной лежит термин **«нечеткая переменная»,** обозначающий нечеткое множество, которому было присвоено некоторое наименование.

Нечеткая переменная характеризуется тройкой ,

где - наименование переменной;

- универсальное множество (область определения ),

- нечеткое множество на , описывающее ограничения (т. е. ) на значения нечеткой переменной .

Например, рассмотренные выше нечеткие множества «молодой» и «пожилой» являются нечеткими переменными, поскольку представляют собой не просто абстрактные отображения действительной оси в интервал [0, 1], а отображения, имеющие за собой определенный смысл, выражающийся как в названии, так и в аналитическом выражении функции принадлежности.

**Лингвистической переменной** называется набор , где

- наименование лингвистической переменной;

- множество ее значений, представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество ; множество называется **базовым терм-множеством лингвистической переменной**;

— синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами множества , в частности, генерировать новые значения; множество где - множество сгенерированных значений, называется **расширенным терм-множеством лингвистической переменной**;

- семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой , в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Или, другими словами, лингвистическую переменную можно задать как пятерку , где

- название лингвистической переменной;

- базовое терм-множество лингвистической переменной , т. е. множество названий лингвистических значений переменной каждому из которых соответствует нечеткая переменная с областью определения в виде универсального множества

- синтаксическое правило (обычно грамматика), порождающее значения лингвистической переменой;

- семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной ее смысл, т. е. нечеткое подмножество универсального множества .

Примеры лингвистических переменных.

11. На рис. 7 представлена графическая интерпретация лингвистической переменной «цена».

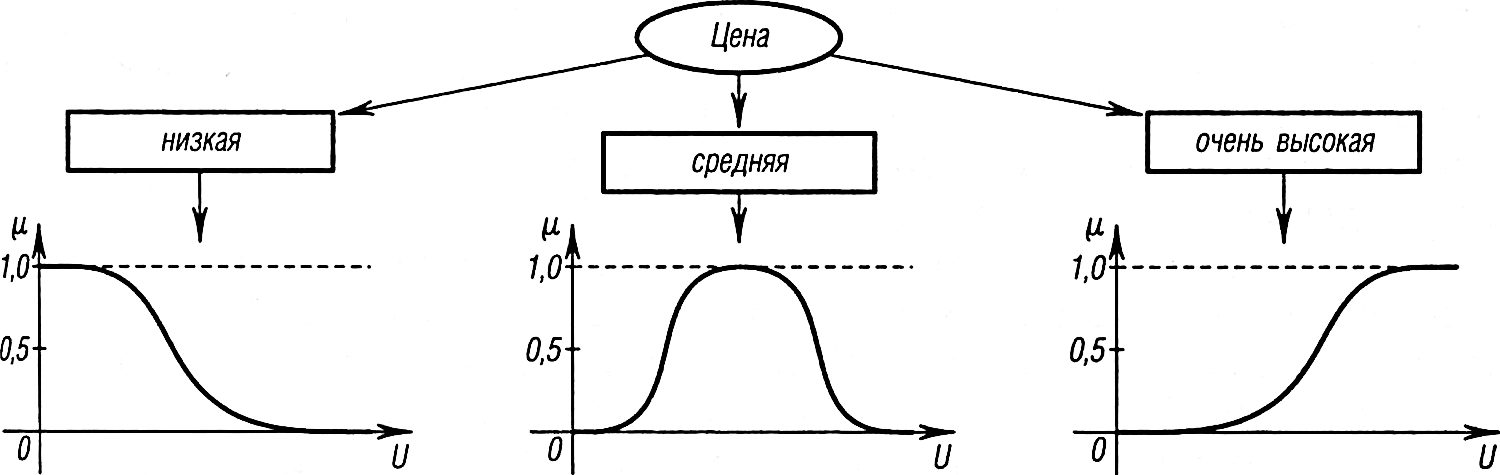


Рис. 7. Лингвистическая переменная «цена»

**Нечеткие числа**

Одной из основных областей применения нечеткой логики является выполнение арифметических операций с нечеткими множествами, описывающими ту или иную модель или систему так, как если бы это были обычные числа. В качестве нечетких множеств при этом могут использоваться и термы лингвистических переменных, с помощью которых исследуемая система или модель была описана в силу невозможности применения обычных, количественных математических методов. А для снижения трудоемкости операций с нечеткими множествами используют специальный их тип — нечеткие числа.

**Нечеткие числа** - нечеткие переменные, определенные на числовой оси. Иначе говоря, нечеткое число определяется как нечеткое множество на множестве действительных чисел с функцией принадлежности где - действительное число, т. е.

